Cours ESPACE VECTORIEL $\mathbb{K}^n$

1 Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Définitions et rappels de cours

La plan $\mathbb{R}^2$

Le **plan $\mathbb{R}^2$** représente l'ensemble de tous les couples (x, y) réels.
Avec $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

L'espace $\mathbb{R}^3$

L'**espace $\mathbb{R}^3$** représente l'ensemble de tous les triplets (x, y, z) réels.
Avec $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

Le plan $\mathbb{R}^n$ et les n-uplets

Le **plan $\mathbb{R}^n$** représente l'ensemble de tous les n-uplets de réels.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Un **n-uplet** est une collection de n éléments (où $n \in \mathbb{N}^*$) noté $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ces derniers sont représentés entre parenthèses où chaque éléments sont séparés par une virgule.

Remarque

On dit que **deux n-uplet sont égaux** lorsqu'ils ont le même nombre d'éléments et que chaque éléments sont égaux deux à deux.
Rigoureusement on note :

$$((x_1, x_2, \dots, x_{n_x}) = (y_1, y_2, \dots, y_{n_y})) \iff (n_x = n_y \quad et \quad \forall i \in [\![1; n_x]\!] \quad x_i = y_i)$$

- n-uplet de même taille
- Éléments ordonnés de la même manière

Exemple

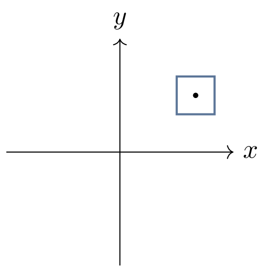
- $u = (1, 2, 3)$
- $v = (1, 2, 4)$

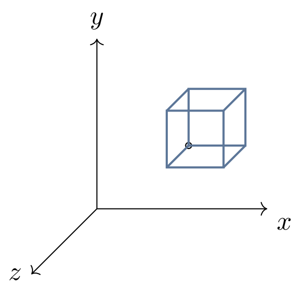
Bien qu'ils aient la même taille, $u \neq v$ car la troisième composante de u est différente de celle de v.

Dimension, vecteurs, composantes

L'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est appelé **dimension** de $\mathbb{R}^n$. Les n-uplets contenus dans $\mathbb{R}^n$ sont appelés **vecteurs**.
Chaque vecteur contient n éléments appelés **composantes**.

Depuis le début, les vecteurs sont appelés n-uplets et sont notés $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, en général, les vecteurs sont **écris en colonne**. Mais on gardera l'écriture en ligne pour un gain de place évident.





Opérations sur les vecteurs

Somme, produit et vecteur nul

Somme de deux vecteurs

Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

La somme de deux vecteurs peut se faire lorsqu'ils **sont de la même taille**. Ensuite, il suffit d'additionner leur $i-ème$ composantes entre elles. Avec $i \in [\![1; n]\!]$.

Produit par un scalaire

Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Vecteur nul

On appelle **vecteur nul** de $\mathbb{R}^n$ le vecteur à n composantes nulles noté $0_{\mathbb{R}^n}$:

$$0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Somme de deux vecteurs

Les exemples suivants permettent de simplement illustrer chaque opération.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \backslash$$

Car les deux vecteurs n'ont pas le même nombre de coordonnées.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Produit par un scalaire λ

$$4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Vecteur nul de $\mathbb{R}^4$

$$0_{\mathbb{R}^4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Propriété

SOMME DE VECTEURS

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x, x_a, x_b, x_c quatres vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. $x_a + x_b = x_b + x_a$ $\Longrightarrow$ COMMUTATIVITÉ
2. $(x_a + x_b) + x_c = x_a + (x_b + x_c)$ $\Longrightarrow$ ASSOCIATIVITÉ
3. $x + 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n} + x = x$ $\Longrightarrow$ ÉLÉMENT NEUTRE
4. $x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ où $-x = (-1)x$ $\Longrightarrow$ OPPOSÉ

Propriété

PRODUIT PAR UN SCALAIRE

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $(x\lambda)\mu = \lambda(x\mu)$ $\Longrightarrow$ ASSOCIATIVITÉ ET COMMUTATIVITÉ
2. $1x = x$ $\Longrightarrow$ ÉLÉMENT NEUTRE

Propriété

Distributivité de l'addition et du produit par un scalaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \qquad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$$

Espace vectoriel

Les propriétés précédentes font de $\mathbb{R}^n$ muni de l'opération d'addition $+$ et de produit par un scalaire $\cdot$ un **espace vectoriel** qui est noté $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Remarque

Tout ce qui a été vu précédemment se généralise à des vecteurs à n composantes complexes.
Ainsi $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ est aussi un espace vectoriel.

Ensemble $\mathbb{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{C}^n$ représente l'ensemble des vecteurs à n-composantes complexes.

$$\mathbb{C} = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$$

L'ensemble $\mathbb{K}$

Les différentes définitions et propriétés vues pendant cette première partie sont autant valable sur $\mathbb{R}$ que sur $\mathbb{C}$.
Alors on désigne une lettre $\mathbb{K}$ pouvant être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{C}$$

Ainsi lorsqu'on utilise $\mathbb{K}^n$ on désigne soit $\mathbb{R}^n$ soit $\mathbb{C}^n$.

2 Combinaison linéaire et sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Combinaison linéaire

On considère deux vecteurs u et v de $\mathbb{K}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires, on peut alors construire un autre vecteur w tel que :

$$w = \lambda x + \mu v$$

w est alors une combinaison linéaire de x et y.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Combinaison linéaire

Soients $k \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_k$ $k-$vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
On appelle **combinaison linéaire** de $u_1, \dots, u_k$ tous vecteurs u de $\mathbb{K}^n$ de la forme :

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k$$

Où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$.

Cette expression peut s'écrire plus simplement :

$$u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$$

u est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k$ si il est possible d'« écrire » u à partir des autres vecteurs.

La base canonique

Exemple

Pour $\mathbb{R}^4$, la base connonique est donnée par :

$$\mathcal{E}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

C'est donc a 4-uplet de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note e_k le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la k-ième coordonnées est égale à 1 et **toutes les autres sont nulles**.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

On appelle **base canonique de $\mathbb{R}^n$** le n-uplet $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Un sous-ensemble F de $\mathbb{K}^n$ est un **sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$** s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. $0_{\mathbb{K}^n} \in F$
2. $\lambda x + y \in F$ avec $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

La seconde condition se résume en montrant que F est stable par combinaison linéaire.

Remarque

La rédaction et les exemples seront fais pendant les TDs, et la méthode sera donnée sur une fiche méthode ultérieurement.

Sous-espace vectoriel engendré

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_k$ k-vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
L'ensemble de toutes les combinaison linéaires de $u_1, \dots, u_k$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{K}^n$.
On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_k$** et on le note $Vect(u_1, \dots, u_k)$.

$$Vect(u_1, \dots, u_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \mid (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k \right\}$$

Méthode

Écrire un sous-espace vectoriel avec la notation $Vect$

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, on cherche à montrer que

$$F = Vect(u_1, \dots, u_k)$$

1. **Si pas précisé**, montrer que F est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que $F \subset Vect(u_1, \dots, u_k)$.
3. Montrer que $Vect(u_1, \dots, u_k) \subset F$.
4. Conclure.

Le fait de montrer l'inclusion dans les 2 sens prouve l'égalité des deux ensembles.